PAP 2.1
Versuch 211: "Gekoppelte Pendel"

Jonas Schweer

24. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
1.1 Ziel des Versuchs . . . 2
1.2 Versuchsaufbau . . . 2
1.3 Physikalische Grundlagen . . . 3
1.3.1 Herleitung und Lösung der Differentialgleichung . . . 3
1.3.2 Symmetrische Schwingung . . . 4
1.3.3 Asymmetrische Schwingung . . . 4
1.3.4 Schwebung . . . 5
1.3.5 Kopplungsgrad . . . 5

2 Messprotokoll **5**

3 Auswertung **8**
3.1 Frequenzen . . . 8
3.1.1 Ungekoppelte Pendel . . . 8
3.1.2 Symmetrische und Asymmetrische Schwingung . . . 8
3.1.3 Frequenzen der gemischten Anregung aus FFT . . . 8
3.1.4 Frequenzen der gemischten Anregung aus Periodendauermessung 9
3.1.5 Vergleich ω_1 . . . 9
3.1.6 Vergleich ω_2 . . . 9
3.1.7 Vergleich ω_I . . . 10
3.1.8 Vergleich ω_{II} . . . 10
3.2 Kopplungsgrade . . . 10
3.2.1 Bestimmung der Kopplungsgrade . . . 10
3.2.2 Vergleich der Verhältnisse . . . 11
3.3 Qualitative Aufgabe . . . 11

4 Zusammenfassung und Diskussion **12**

1 Einleitung

Anmerkung: Alle Bilder, welche in diesem Abschnitt verwendet wurden, sind aus dem Praktikumsskript übernommen worden.
Quelle: 'Physikalisches Praktikum PAP2.1 für Studierende der Physik B.Sc' - Jens Wagner, Februar 2025

1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch wollen wir uns das Verhalten zweier Pendel, welche mit verschiedenen Kopplungsgraden verbunden sind, genauer anschauen. Dazu wollen wir die Frequenzen bei verschiedenen Anregungsarten (symmetrisch, antisymmetrisch, gemischt) vergleichen. Zudem vergleichen wir zwei verschiedene Arten der Frequenzmessung (Cursermessung und FFT). Zuletzt wollen wir noch den Kopplungsgrad für die verschiedenen Stellungen der Feder berechnen und die Verhältnisse vergleichen.

1.2 Versuchsaufbau

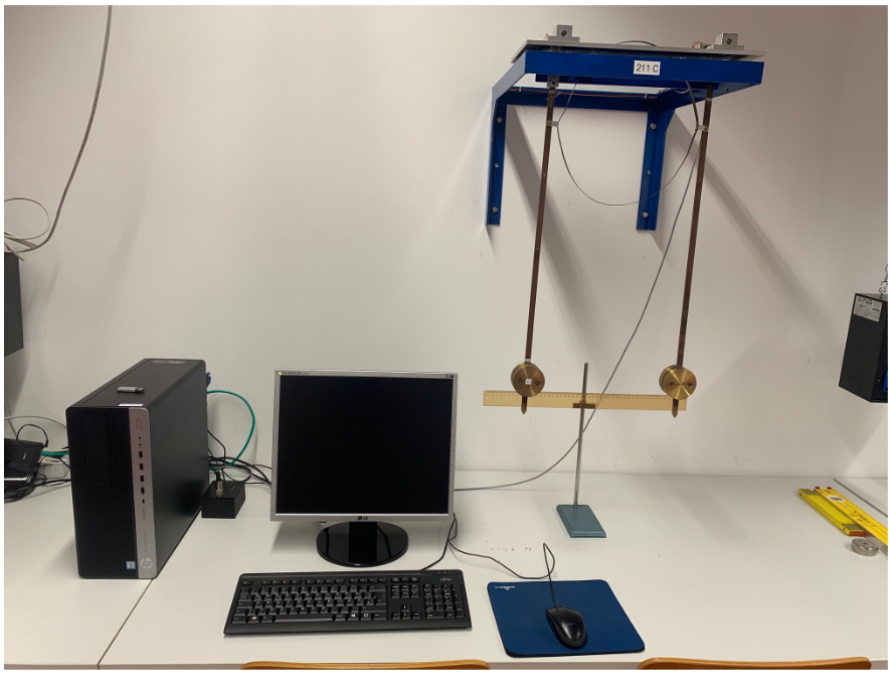


Abbildung 1: Bild des Versuchsaufbaus

Der Aufbau besteht aus zwei Messingpendeln, welche nebeneinander Aufgehängt sind. an ihnen montiert, ist ein Winkelaufnehmer, welcher die Winkel der Pendel an den nebenstehenden Computer zum Speichern und Auswerten der Daten weitergibt. In dem Stab der Pendel sind Löcher auf verschiedenen Höhen vorgefertigt, an die man einen Ring aus Federbronzeband befestigen kann. Dieser dient als unsere Kopplung.

1.3 Physikalische Grundlagen

1.3.1 Herleitung und Lösung der Differentialgleichung

Schauen wir uns zunächst ein einzelnes, ungekoppeltes Pendel an. Dieses hat ein Trägheitsmoment J und ein Direktionsmoment $D = mgL$, wobei L die Pendellänge ist. Für dieses Pendel folgt die Differentialgleichung:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi \tag{1}$$

Gelöst erhält man so eine harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2}$$

Koppelt man nun zwei solcher Pendel über eine Feder aneinander, so erhält man noch ein weiteres Direktionsmoment, welches von der Auslenkung beider Pendel abhängt. Die Differentialgleichung wird dann:

$$J\ddot{\varphi}_1 = -D\varphi_1 + D'(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{3}$$
$$J\ddot{\varphi}_2 = -D\varphi_2 + D'(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

mit $D' = D_F l^2$, D_F ist Federkonstante und l Länge von Feder bis zur Aufhängung. Mit der Substitution $u = \varphi_1 + \varphi_2$ und $v = \varphi_1 - \varphi_2$ entkoppeln wir die Differentialgleichungen:

$$J\ddot{u} + Du = 0 \tag{6}$$
$$J\ddot{v} + (D + 2D')v = 0 \tag{7}$$

löst man nun die Differentialgleichung und resubstituiert, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t) \tag{8}$$
$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}(A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t - A_2 \cos\omega_2 t - B_2 \sin\omega_2 t) \tag{9}$$

Dabei gilt:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}} \tag{10}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}} \tag{11}$$

Wir wollen nun für die Anfangsbedingungen aus Abbildung 2 die Bewegungsgleichungen bestimmen.

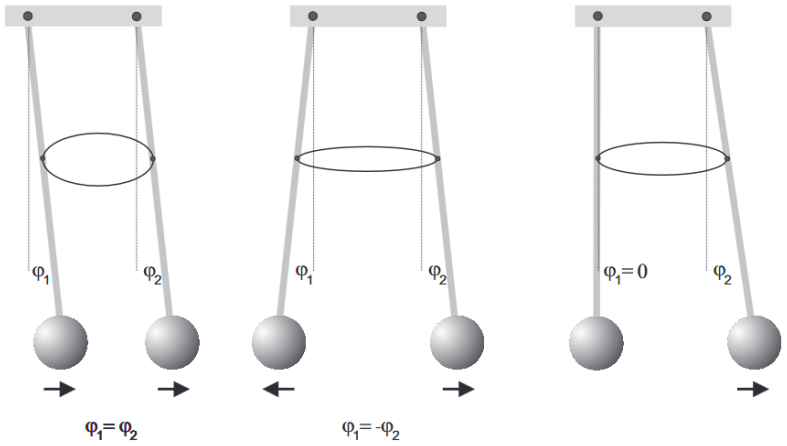


Abbildung 2: Untersuchte Schwingungen. Links: Symmetrisch, Mitte: Asymmetrisch, Rechts: SChwebung

1.3.2 Symmetrische Schwingung

Bei der symmetrischen Schwingung werden beide Pendel um den gleichen Winkel in die gleiche Richtung ausgelenkt und dann losgelassen. Die Anfangsbedingungen lauten also:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0 \tag{12}$$
$$\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \tag{13}$$

Berechnen wir damit die Koeffizienten, so erhalten wir:

$$A_1 = 2\varphi_0,\ A_2 = B_1 = B_2 = 0 \tag{14}$$
$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_1 t \tag{15}$$

Wir sehen also, dass die Kopplung keinerlei Einfluss auf die Schwingung hat. Die beiden Pendel schwingen als wären sie ungekoppelt. Die Feder wird bei der Schwingung weder komprimiert noch gestreckt und übt deshalb auch kein zusätzliches Drehmoment aus.

1.3.3 Asymmetrische Schwingung

Bei der asymmetrischen Schwingung werden beide Pendel wieder um des gleichen Winkel, aber diesmal in unterschiedliche Richtung ausgelenkt und losgelassen. In den Anfangsbedingungen spiegelt sich das folgendermaßen wieder:

$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0 \tag{16}$$
$$\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \tag{17}$$

Die Koeffizienten und letztendliche Bewegungsgleichung lauten:

$$A_2 = 2\varphi_0,\ A_1 = B_1 = B_2 = 0 \tag{18}$$
$$\Rightarrow \varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_2 t \tag{19}$$

Diesmal hängt die Schwingung von der Kopplung ab. Die Pendel schwingen gegenphasig mit erhöhter Frequenz ω_2.

1.3.4 Schwebung

Bei der Schwebung lenken wir nur ein Pendel aus, das andere halten wir in der Ruhelage fest. Anschließend lassen wir sie gleichzeitig los. Die Anfangsbedingungen lauten hier:

$$\varphi_1(0) = 0,\ \varphi_2(0) = \varphi_0 \tag{20}$$
$$\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \tag{21}$$

Ein drittes mal berechnen wir die Koeffizienten und erhalten so für sie und die Bewegungsgleichungen:

$$A_1 = -A_2 = \varphi_0,\ B_1 = B_2 = 0 \tag{22}$$
$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \tag{23}$$
$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \tag{24}$$

Die Schwingungen der beiden Pendel wird also von einer Schwebungsfrequenz überlagert. So ist Pendel 1 anfangs in ruhe und die gesamte Energie ist in Pendel 2 gespeichert. Allmählich wird die Energie jedoch auf Pendel 1 übertragen bis Pendel 2 schließlich kurzzeitig still steht. Dann fließt die Energie wieder zurück. Die Frequenz eines einzelnen Pendels ist somit $\omega_I = \frac{\omega_2+\omega_1}{2}$ und die Frequenz der Energieübertragung $\omega_{II} = \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$.

1.3.5 Kopplungsgrad

Der Kopplungsgrad ist eine Größe die angibt, wie sehr die Kopplung die Schwingung beeinflusst. Berechnet wird er durch folgende Formel:

$$\kappa = \frac{D'}{D + D'} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \tag{25}$$

Auf diese Formel kommt man mit Hilfe von Formel (10) und Formel (11).

2 Messprotokoll

Messprotokoll 211: Gekoppelte Pendel

03.03.2025
Harish Mahendran
Jonas Schweer

Messaufbau:

- Zwei Pendel aus Messing
  $\rho = 7{,}5\ g/cm^3$
- Kopplungsfeder (Ring aus Federbronzeband)
- Fest montierter, magnetischer Winkelaufnehmer
- Analog-Digital Wandler
- PC

Aufgabe 1: Eigenschwingungsfrequenz des ungekoppelten Pendels

Zuerst regen wir beide Pendel an, ohne sie mit der Feder zu verbinden. Mit dem PC messen wir die Frequenz, indem wir eine Fouriertransformation durchführen. Außerdem speichern wir die Messwerte.

$\mu = 3{,}892\ rad/s$
$\sigma = 0{,}154\ rad/s$

Aufgabe 2: Symmetrische und antisymmetrische Eigenschwingung

Nun befestigen wir die Ringfeder in einer der markierten Vorrichtungen. Wir notieren den Abstand der Befestigung zur Pendelachse.
Anschließend lenken wir die Pendel sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch aus und starten die Messung. Wir messen so die Frequenz bei drei verschiedenen Federpositionen und speichern die Werte ab.

Lage	Abstand Pendelachse [cm]	Symmetrische Frequenz ω_{sym} $[\frac{rad}{s}]$	Asymmetrische Frequenz ω_{asym} $[\frac{rad}{s}]$
Oben	$19{,}20 \pm 0{,}20$	$3{,}91 \pm 0{,}08$	$4{,}10 \pm 0{,}08$
Mittel	$29{,}20 \pm 0{,}20$	$3{,}90 \pm 0{,}08$	$4{,}33 \pm 0{,}08$
Unten	$39{,}20 \pm 0{,}20$	$3{,}90 \pm 0{,}08$	$4{,}65 \pm 0{,}09$

Tabelle 1: Symmetrische und Asymmetrische Eigenfrequenzen bei verschiedenen Kopplungsgraden

Aufgabe 3: gemischte Anregung

Wir nutzen wieder die selben Kopplungen wie zuvor, jedoch halten wir ein Pendel in der Ruhelage fest, während wir das andere auslenken. Mit der Fouriertransformation bestimmen wir Schwebungs- und Schwingungsfrequenzen.

Lage	Abstand Pendelachse [cm]	Schwebungsfrequenz ω_1 $[\frac{rad}{s}]$	Schwingungsfrequenz ω_{11} $[\frac{rad}{s}]$
Oben	$19,20 \pm 0,20$	$3,91 \pm 0,04$	$4,11 \pm 0,05$
Mittel	$29,20 \pm 0,20$	$3,91 \pm 0,05$	$4,34 \pm 0,05$
Unten	$39,20 \pm 0,20$	$3,92 \pm 0,06$	$4,66 \pm 0,07$

Tabelle 2: Frequenzen gemischte Auslenkung

Mit dem Curser messen wir auch die Periodendauer

Lage	Abstand Pendelachse [cm]	Periodendauer Schweb. T_1 [s]	Periodendauer Schwing. T_{11} [s]
Oben	$19,20 \pm 0,20$	$64 \pm 0,8$	$1,64 \pm 0,12$
Mittel	$29,20 \pm 0,20$	$29,30 \pm 0,14$	$1,60 \pm 0,03$
Unten	$39,20 \pm 0,20$	$16,93 \pm 0,28$	$1,57 \pm 0,05$

Tabelle 3: Periodendauer gemischte Auslenkung

Aufgabe 4: Gekoppelte elektrische Schwingkreise

Wir schauen uns qualitativ einen gekoppelten elektrischen Schwingkreis an.

Wir sehen, dass die Schwebungsfrequenz sinkt, wenn wir den Abstand der Spulen erhöhen und so den Kopplungsgrad senken.

3. März 4. Oberstufe Gruppe

3 Auswertung

3.1 Frequenzen

3.1.1 Ungekoppelte Pendel

Die erste Messung haben wir für ungekoppelte Pendel durchgeführt. Die Frequenz, die wir gemessen haben, lässt sich dem Messprotokoll entnehmen als:

$$\boxed{\omega = (3.89 \pm 0.15)\frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

3.1.2 Symmetrische und Asymmetrische Schwingung

Auch die Symmetrischen und Asymmetrischen Schwingungsfrequenzen lassen sich unserem Messprotokoll entnehmen:

Abstand Pendelachse [cm]	ω_{sym} $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	ω_{asym} $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$
19.20 ± 0.20	3.91 ± 0.08	4.10 ± 0.08
29.20 ± 0.20	3.90 ± 0.08	4.33 ± 0.08
39.20 ± 0.20	3.90 ± 0.08	4.65 ± 0.09

Tabelle 1: Symmetrische und Asymmetrische Schwingungsfrequenzen bei verschiedenen Kopplungen

3.1.3 Frequenzen der gemischten Anregung aus FFT

Mit dem auf dem Versuchs-PC vorgeladenen Python-Programm, konnten wir auf der Fourier-Transformation die Frequenzen ω_1 und ω_2 bestimmen. Diese Lauten tabellarisch:

Abstand Pendelachse [cm]	ω_1 $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	ω_2 $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$
19.20 ± 0.20	3.91 ± 0.04	4.11 ± 0.05
29.20 ± 0.20	3.91 ± 0.05	4.34 ± 0.05
39.20 ± 0.20	3.92 ± 0.06	4.66 ± 0.07

Tabelle 2: Kreisfrequenzen bei gemischter Anregung aus Fouriertransformation

Umrechnen können wir diese nun mit Hilfe des Zusammenhangs: $\omega_I = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ und $\omega_{II} = \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ in Frequenz der Schwebung und Frequenz der Schwingung. Diese lauten dann:

Abstand Pendelachse [cm]	ω_I $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	ω_{II} $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$
19.2 ± 0.2	4.01 ± 0.06	0.10 ± 0.06
29.2 ± 0.2	4.13 ± 0.07	0.21 ± 0.07
39.2 ± 0.2	4.29 ± 0.09	0.37 ± 0.09

Tabelle 3: Schwebungs- und Schwingungsfrequenz aus FFT berechnet

3.1.4 Frequenzen der gemischten Anregung aus Periodendauermessung

Auch in dem Messprotokoll zu finden, ist eine Tabelle, in der die gemessenen Periodendauern für jeweils eine Schwebungsperiode und eine Schwingungsperiode notiert sind. Diese können wir mit folgenden Formeln in Frequenzen umrechnen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{26}$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T^2}\Delta T \tag{27}$$

Diese entsprechen dann ω_I und ω_{II}.

Abstand Pendelachse [cm]	ω_I $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	ω_{II} $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$
19.20 ± 0.20	3.83 ± 0.28	0.0982 ± 0.0012
29.20 ± 0.20	3.93 ± 0.07	0.2144 ± 0.0010
39.20 ± 0.20	4.00 ± 0.13	0.371 ± 0.006

Tabelle 4: Frequenzen, bestimmt mit dem Cursor

3.1.5 Vergleich ω_1

ω_1 ist die Frequenz, die den angekoppelten Anteil der Schwingung ausmacht. Dieses ω haben wir also einmal Bestimmt, als wir die ungekoppelten Pendel gemessen haben, drei mal als wir die symmetrische Schwingung betrachtet haben (vgl. Formel (15)) und drei mal, als wir die Fouriertransformation der gemischten Schwingung analysiert haben. Die Ergebnisse waren somit:

	Ungekoppelt	Symmetrische Schwingung			Gemischte Schwingung		
$\omega_1[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	3.89	3.91	3.90	3.90	3.91	3.91	3.92
$\Delta\omega_1[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	± 0.15	± 0.08	± 0.08	± 0.08	± 0.04	± 0.05	± 0.06
σ		0.12	0.06	0.06	0.13	0.13	0.19

Tabelle 5: Alle Werte mit ihren Abweichungen zu der ungekoppelten Messung

In der letzten Zeile stehen die Abweichungen der gekoppelten Ergebnisse zu der ungekoppelten Schwingung. Berechnet wurden diese nach:

$$\sigma = \frac{|x - y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \tag{28}$$

3.1.6 Vergleich ω_2

Im Vergleich zu ω_1 haben wir ω_2 nur 6 mal berechnet. Außerdem ist der Wert nach Formel (11) vom Kopplungsgrad abhängig. Also lässt sich immer nur der Wert der asymmetrischen Messung (hängt laut Formel (19) nur von ω_2 ab) und der der Fouriertransformation der gemischten Schwingung vergleichen, wenn die Messung bei der selben Kopplung entstand. Wir vergleichen wieder Tabellarisch:

Abstand Pendelachse [cm]	$\omega_{2,\text{asym}}[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	$\omega_{2,\text{gem}}[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	σ
19.20 ± 0.20	4.10 ± 0.08	4.11 ± 0.05	0.11
29.20 ± 0.20	4.33 ± 0.08	4.34 ± 0.05	0.11
39.20 ± 0.20	4.65 ± 0.09	4.66 ± 0.07	0.09

Tabelle 6: Verglichene ω_2 mit ihren Abweichungen bei verschiedenen Kopplungen

3.1.7 Vergleich ω_I

In diesem Abschnitt vergleichen wir die beiden Werte für ω_I, die wir in Tabelle 3 und Tabelle 4 erhalten haben. Dabei müssen wir wieder zwischen den einzelnen Kopplungen unterscheiden:

Abstand Pendelachse [cm]	$\omega_{I,\text{FFT}}[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	$\omega_{I,\text{T}}[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	σ
19.20 ± 0.20	4.01 ± 0.06	3.83 ± 0.28	0.63
29.20 ± 0.20	4.13 ± 0.07	3.93 ± 0.07	2.02
39.20 ± 0.20	4.29 ± 0.09	4.00 ± 0.13	1.83

Tabelle 7: Verglichene ω_I mit ihren Abweichungen bei verschiedenen Kopplungen

3.1.8 Vergleich ω_{II}

Wir machen genau das selbe wie in Tabelle 7, nur diesmal mit ω_{II}:

Abstand Pendelachse [cm]	$\omega_{II,\text{FFT}}[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	$\omega_{II,\text{T}}[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$	σ
19.20 ± 0.20	0.10 ± 0.06	0.0982 ± 0.0012	0.03
29.20 ± 0.20	0.21 ± 0.07	0.2144 ± 0.0010	0.06
39.20 ± 0.20	0.37 ± 0.09	0.371 ± 0.006	0.01

Tabelle 8: Verglichene ω_{II} mit ihren Abweichungen bei verschiedenen Kopplungen

3.2 Kopplungsgrade

3.2.1 Bestimmung der Kopplungsgrade

Nun wollen wir aus den gemessenen Periodendauern der gemischten Schwingung die Kopplungsgrade bestimmen. Wenn wir in Formel (25) die Beziehung $T_I = \frac{2}{\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}}$ und $T_{II} = \frac{2}{\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}}$ einsetzen, so erhalten wir für den Kopplungsgrad:

$$\kappa = \frac{\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)^2}{\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)^2} \tag{29}$$

Den Fehler des Kopplungsgrades können wir dann mit folgender Formel bestimmen:

$$\Delta\kappa = \kappa\sqrt{\frac{T_1^6\Delta T_2^2 + T_1^4T_2^2\Delta T_1^2 - 2T_1^4T_2^2\Delta T_2^2 - 2T_1^2T_2^4\Delta T_1^2 + T_1^2T_2^4\Delta T_2^2 + T_2^6\Delta T_1^2}{T_1^2T_2^2\left(T_1^4 + 2T_1^2T_2^2 + T_2^4\right)}} \tag{30}$$

Berechnet wurde diese Formel mit dem im Skript hinterlegten Jupyter Notebook. Somit erhalten wir für die Kopplungsgrade bei verschiedenen Höhen der Feder:

Abstand Pendelachse [cm]	Kopplungsgrad κ
19.20 ± 0.20	0.051 ± 0.004
29.20 ± 0.20	0.1089 ± 0.0021
39.20 ± 0.20	0.184 ± 0.006

Tabelle 9: Bestimmte Kopplungsgrade

3.2.2 Vergleich der Verhältnisse

Nun wollen wir die Verhältnisse der Kopplungsgrade mit dem Verhältnis der Längenmessung vergleichen. In der Theorie Sollte gelten:

$$\frac{\kappa_i}{\kappa_j} = \left(\frac{l_i}{l_j}\right)^2 \tag{31}$$

Also bilden wir nun die Verhältnisse der in Tabelle 9 notierten Werte. n/m bedeutet hierbei, dass das Verhältnis zwischen Zeile n und Zeile m gebildet wurde. Der Fehler wird durch

$$\Delta\left(\frac{\kappa_i}{\kappa_j}\right) = \left(\frac{\kappa_i}{\kappa_j}\right)\sqrt{\left(\frac{\Delta\kappa_i}{\kappa_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\kappa_j}{\kappa_j}\right)^2} \tag{32}$$

bzw.

$$\Delta\left(\frac{l_i}{l_j}\right)^2 = 2\left(\frac{l_i}{l_j}\right)^2\sqrt{\left(\frac{\Delta l_i}{l_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_j}{l_j}\right)^2} \tag{33}$$

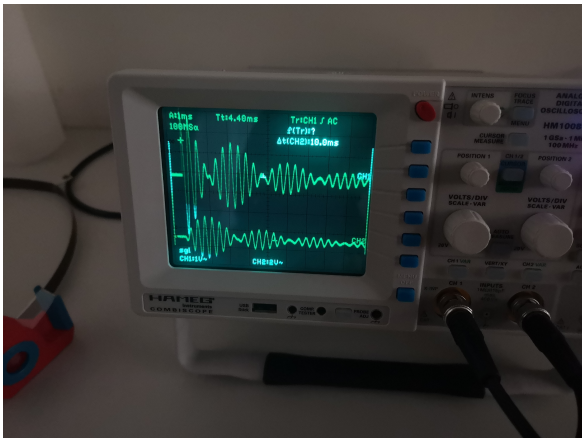
berechnet.

Verhältnis	1/2	2/3	1/3
Längenverhältnis	0.432 ± 0.011	0.555 ± 0.009	0.240 ± 0.006
Kopplungsgradverhältnis	0.47 ± 0.04	0.592 ± 0.022	0.277 ± 0.024
Abweichung	0.91	1.52	1.54

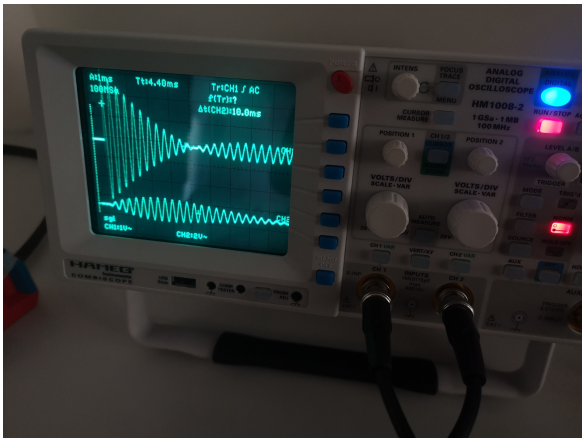
Tabelle 10: Vergleich der Verhältnisse

3.3 Qualitative Aufgabe

Diese Aufgabe zeigt, dass zwei elektromagnetische Schwingkreise analog zu gekoppelten Pendeln betrachtet werden können. Der Kopplungsgrad hängt hierbei von dem Abstand der beiden Spulen ab.



(a) Oszilloskopbild wenn die Spulen nah aneinander stehen



(b) Oszilloskopbild wenn die Spulen etwas Abstand haben

Abbildung 3: Vergleich der Oszilloskopbilder bei unterschiedlichem Spulenabstand

Wir erkennen anhand der Bilder, dass bei einem größeren Abstand die Energie langsamer auf die zweite Spule übertragen wird. Das deutet auf einen geringeren Kopplungsgrad hin. Dies ist logisch, da die Kopplung dadurch entsteht, dass das Magnetfeld, das durch den Strom in der ersten Spule erzeugt wird (siehe Ablauf normaler EM-Schwingkreis) nun auch eine Spannung in der zweiten Spule induziert. So verliert der erste Schwingkreis etwas an Energie und der zweite fängt ebenfalls an zu schwingen. Je näher die Spulen beieinander sind, desto stärker ist das Magnetfeld der ersten Spule an der Position der zweiten Spule. Dadurch wird eine größere Spannung in der zweiten Spule induziert, und mehr Energie wird übertragen.

4 Zusammenfassung und Diskussion

Zusammenfassend haben wir in diesem Versuch die Kopplung von zwei Pendeln untersucht. Dabei haben wir zuerst die Frequenzen ω_1 und ω_2 sowie ω_I und ω_{II} aus unseren Messwerten bei der symmetrischen, asymmetrischen und gemischten Schwingung bestimmt. Das haben wir für drei Verschiedene Kopplungsgraden wiederholt, um diese letztendlich auch quantitativ berechnen zu können und deren Verhältnisse mit den theoretisch erwarteten Verhältnissen zu vergleichen.
Beim Vergleich all unserer Messungen für ω_1 mit dem Frequenzwert bei der ungekoppelten Schwingung kam es nur zu sehr kleinen Abweichungen mit der Maximalabweichung von $\sigma = 0.19$. Das deutet auf eine sehr gute Übereinstimmung hin und lässt systematische Fehler ausschließen.
Bei dem Vergleich der Werte für ω_2 bei jeweils dem gleichen Kopplungsgrad zeigt sich ein noch besseres Ergebnis: Die Maximalabweichung lautet hier nur $\sigma = 0.11$.
Bei dem Vergleich von ω_I sind die Abweichungen mit einem Maximalwert von $\sigma = 2.02$ zwar auch noch nicht außerhalb des kritischen 3σ-Bereichs, jedoch vor allem mit Blick auf die vorherigen, recht präzisen Messungen, kann man nach möglichen Problemquellen fragen. Schauen wir uns aber davor noch den Vergleich von ω_{II} an. Bei diesen kommt es wieder zu extrem kleinen Abweichungen von maximal $\sigma = 0.06$. Dazu muss man fairerweise auch erwähnen, dass der Fehler der Frequenz aus der Fouriertransformation

zwischen 60% und 24% lag. So ist ein kleiner Fehler nicht sonderlich überraschend.
Was könnte also der Grund für die größeren Abweichungen bei der ω_I-Messung und der großen relativen Fehler bei der ω_{II} Messung sein? Der Hauptgrund wird vermutlich auf die schwierigere Anregung der gemischten Schwingung sein. Während bei der symmetrischen und asymmetrischen Schwingung die Auslenkungen einfacher einzustellen ist und kleine Ungenauigkeiten die Schwingung nicht stark beeinflussen, führt ein unsauberes Auslenken (das eine Pendel ist nicht genau bei $\varphi_1(0) = 0$, oder es hat eine Anfangsgeschwindigkeit), kommt die Schwebung nicht mehr schön leicht sichtbar zu Stande und die Bewegungsgleichung wird komplexer. So kann man in der Fouriertransformation auch keinen dünnen Peak bei der gesuchten Frequenz mehr erkennen, sondern er wird breiter. Bei kleinen Frequenzen wie bei ω_{II} führt das natürlich zu einem vergleichsweise großen relativen Fehler. Eine ebenfalls denkbare Fehlerquelle, welche vermutlich zu der Abweichung von ω_I geführt hat, ist, dass bei einer ausreichend großen Zeitspanne der Messung (wir haben die Messdauer immer relativ groß gehabt), die Auflösung der einzelnen Schwingungen innerhalb der Schwebung relativ schwer Werden zu zählen. Es ist denkbar, dass wir so vielleicht eine falsche Anzahl an Schwingungen pro Zeit gezählt haben. Da wir das nicht in den Fehler einbezogen haben, und bei genug gezählten Schwingungsperioden der Zeitfehler sehr klein wird, könnte das zu einer falschen Frequenz geführt haben.
Das etwas an der mit dem Cursor gemessenen Periodendauer nicht gestimmt hat, bestätigt auch der Vergleich der Verhältnisse der Kopplungsgrade mit dem Verhältnis der Quadrate der Längenmessung (Abstand der Kopplungsfeder). So ist die Abweichung dort zwar auch nicht dramatisch groß (eine Periode zu viel oder zu wenig gezählt würde auch keinen großen Unterschied machen bei genügend gezählter Perioden), allerdings ist eine Abweichung von maximal $\sigma = 1.54$ auch keine perfekte Übereinstimmung. Vermutlich ist auch hier der Fehler aus der Periodendauermessung verantwortlich. Allerdings können diese Fehler auch einfach statistischer Natur sein, da sie immer noch innerhalb der 3σ-Region liegen.
Im letzten Versuchsteil haben wir uns dann noch qualitativ einen gekoppelten elektromagnetischen Schwingkreis anschauen, und das Verhalten bei verschiedenen Spulenabständen mit unserem physikalischen Verständnis in Einklang bringen.
Alles in allem würde ich diesen Versuch als Erfolg werten. Wir konnten die vorher hergeleiteten Bewegungsgleichungen überprüfen, indem wir die Frequenzen bei verschiedenen Anregungen bestimmen konnten. Dabei wiesen die Werte nur sehr kleine Abweichungen auf, und werden somit vermutlich sehr nah an dem Echtwert liegen. Lediglich die gemischte Schwingung wies in einigen Messungen eine etwas größere Abweichung auf, für welche man aber eine relativ plausible Erklärung finden konnte. Diese Abweichungen haben sich teilweise auch weiter in die Kopplungsverhältnisse gezogen, welche auch etwas größere, aber nicht dramatische Abweichungen aufgezeigt haben. Die echten Werte werden also vermutlich etwas anders lauten, jedoch sind wir nicht weit entfernt.
Bei einer erneuten Versuchsdurchführung würde ich vor allem genauer beim Periodenzählen aufpassen. Denkbar wäre auch, mit einem Computerprogramm die Peaks zählen zu lassen, um so definitiv keinen Zählfehler zu erhalten. Auch wäre es sinnvoll, einen besseren Startmechanismus zu haben. Zum Beispiel eine Vorrichtung, mit der man die Pendel genauer auslenken und zuverlässiger mit einer Geschwindigkeit von $\dot{\varphi}(0) = 0$ loslassen kann. Dann würde die Schwebung sicher besser und definierter auftreten.